

コンピュータに 数学を解かせる

京都大学
大学院情報学研究科
知能情報学コース
村脇 有吾

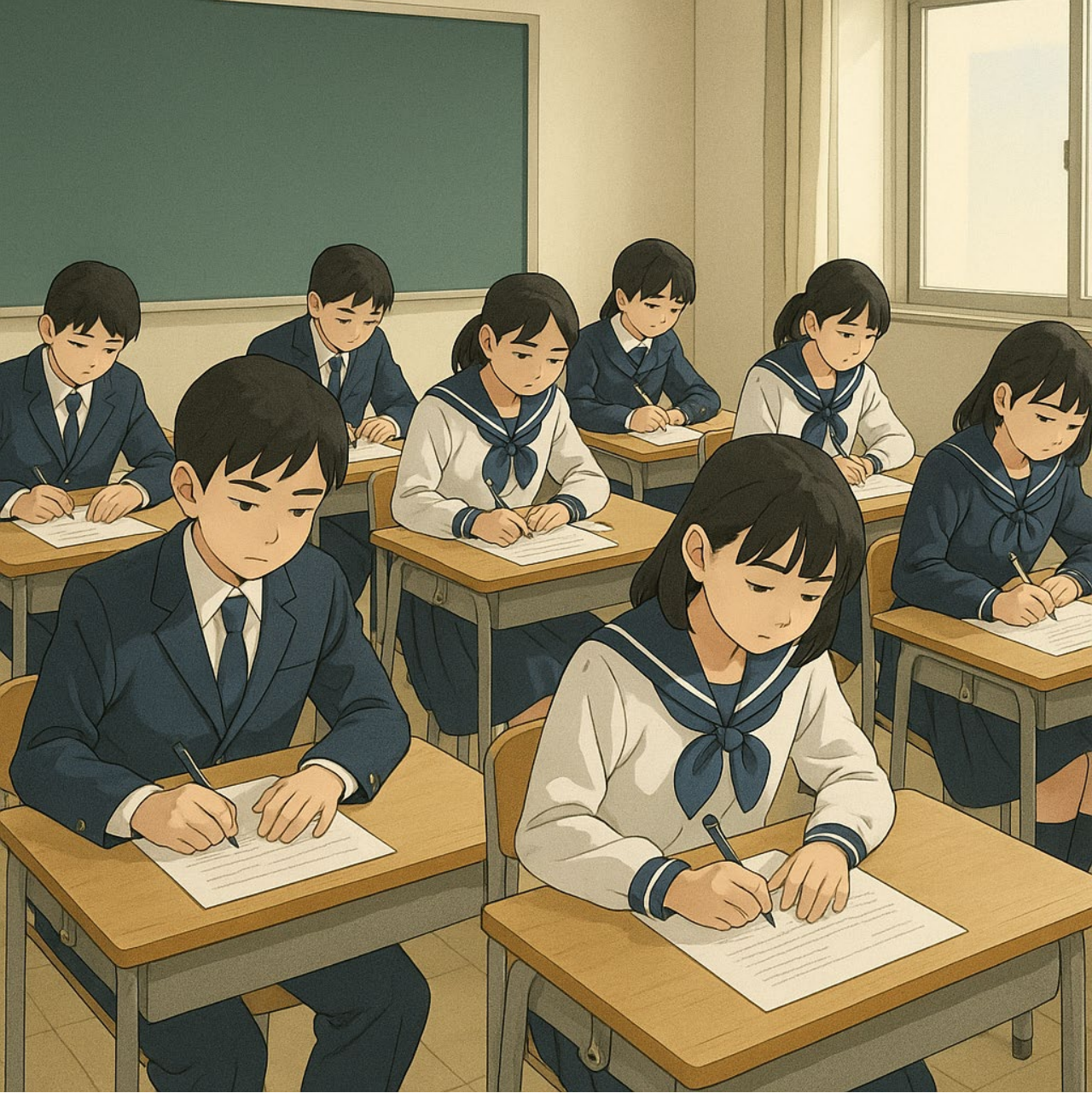


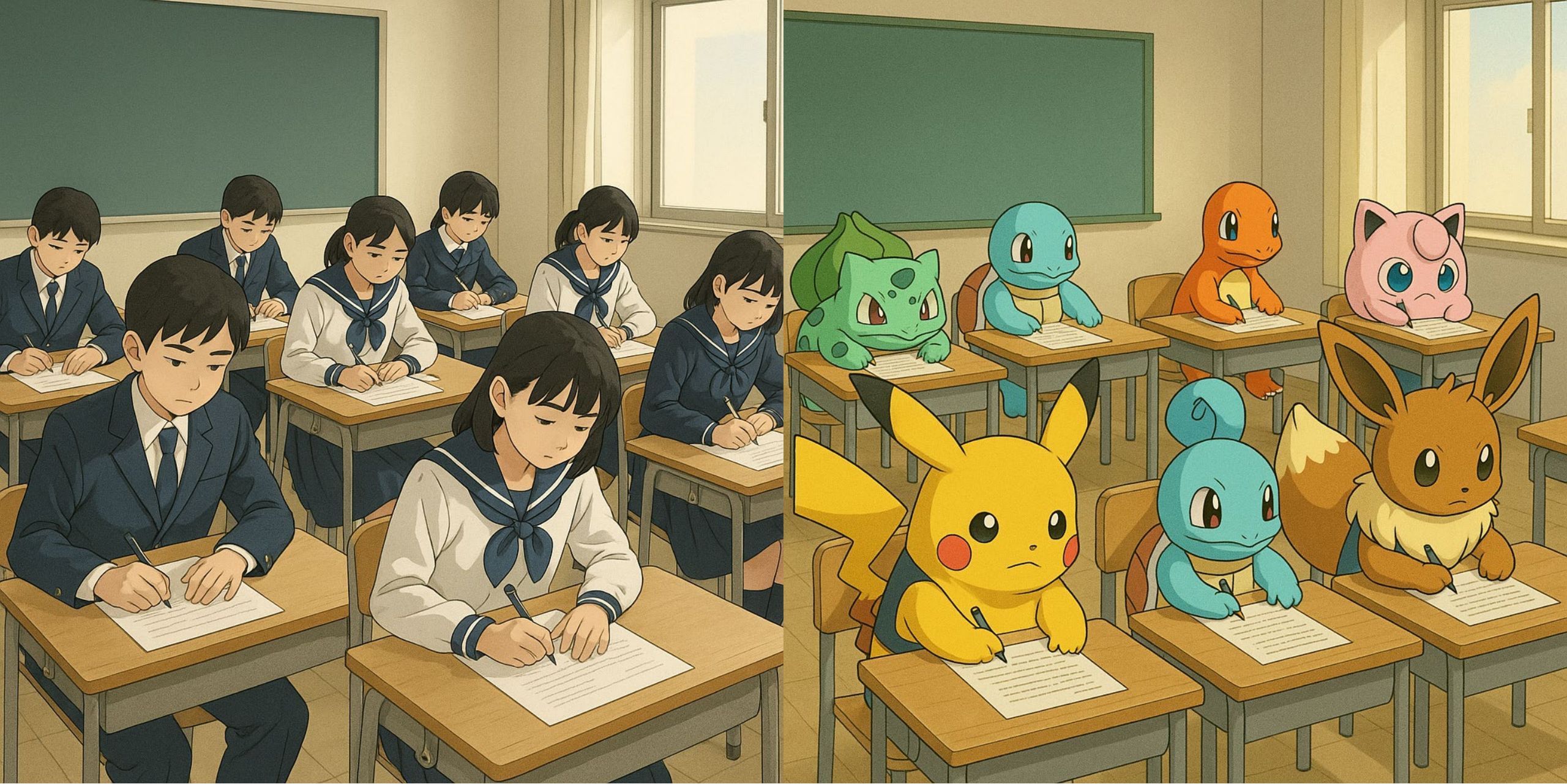
講演の紹介文から

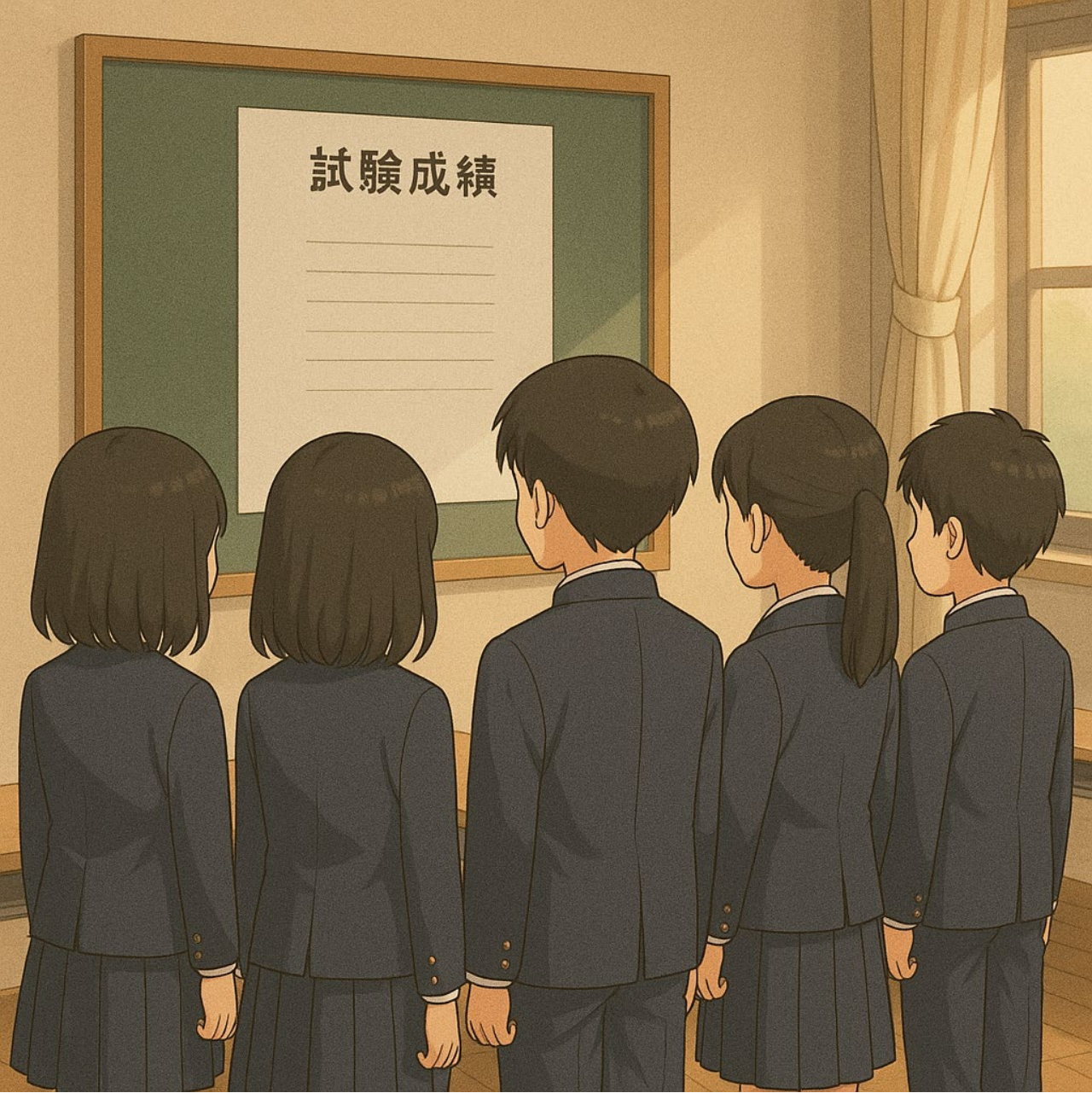
この講義では、人間が自ら数学（算数）の問題を解くのではなく、代わりにコンピュータに解かせるという設定を考えます。そのためには、人間はコンピュータに何をどのように教えれば良いのでしょうか？この問いを探ることで、私たち自身の知的活動の本質が見えてきます。講義の中では、**ChatGPT**に代表される大規模言語モデルの最新の研究動向を紹介しつつ、人間とコンピュータの知性の共通点や違いについても考えていきます。

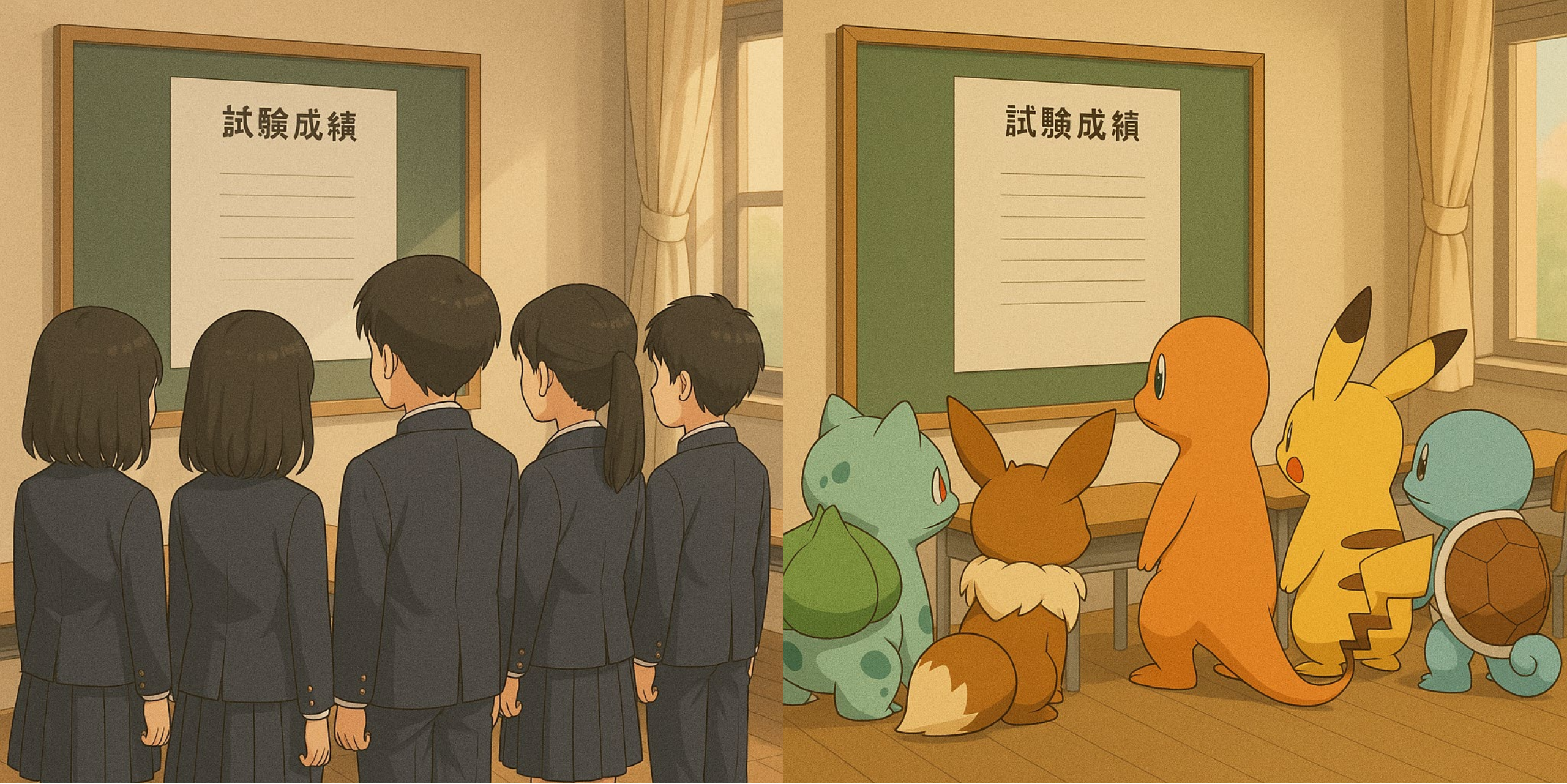
講演の紹介文から

この講義では、人間が自ら数学（算数）の問題を解くのではなく、代わりにコンピュータに解かせるという設定を考えます。そのためには、人間はコンピュータに何をどのように教えれば良いのでしょうか？この問いを探ることで、私たち自身の知的活動の本質が見えてきます。講義の中では、ChatGPTに代表される大規模言語モデルの最新の研究動向を紹介しつつ、人間とコンピュータの知性の共通点や違いについても考えていきます。









leaderboard (リーダーボード): 成績表

 table options
  column visibility

	Rank	Type	Model モデル	Average 平均	MATH 数学	GPQA 化学・生物・物理
👤	1	🔴	MazyarPanahi/calme-3.2-instruct-78b 	🟢 52.08	40.33	20.36
👤	2	💬	MazyarPanahi/calme-3.1-instruct-78b 	🟢 51.29	39.27	19.46
👤	3	💬	dfurman/CalmeRys-78B-Orpo-v0.1 	🟢 51.23	40.63	20.02
👤	4	💬	MazyarPanahi/calme-2.4-rys-78b 	🟢 50.77	40.71	20.36
👤	5	🔴	huihui-ai/Qwen2.5-72B-Instruct-abliterated 	🟢 48.11	60.12	19.35
👤	6	💬	Qwen/Qwen2.5-72B-Instruct 	🟢 47.98	59.82	16.67
👤	7	💬	MazyarPanahi/calme-2.1-qwen2.5-72b 	🟢 47.86	59.14	15.10
👤	8	🔴	newsbang/Homer-v1.0-Qwen2.5-72B 	🟢 47.46	49.02	22.15
👤	9	💬	ehristoforu/qwen2.5-test-32b-it 	🟢 47.37	59.74	15.21
👤	10	🔴	Saxo/Linkbricks-Horizon-AI-Avengers-V1-32B 	🟢 47.34	60.27	14.99

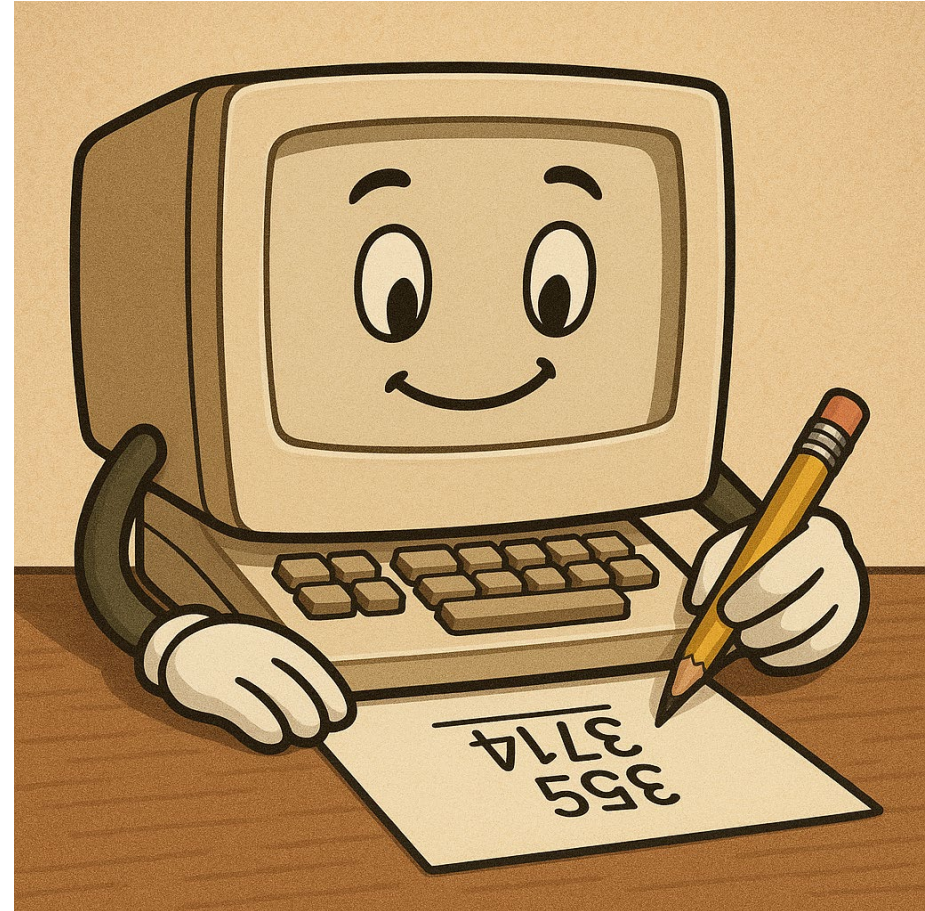
leaderboard (リーダーボード): 成績表

table options column visibility

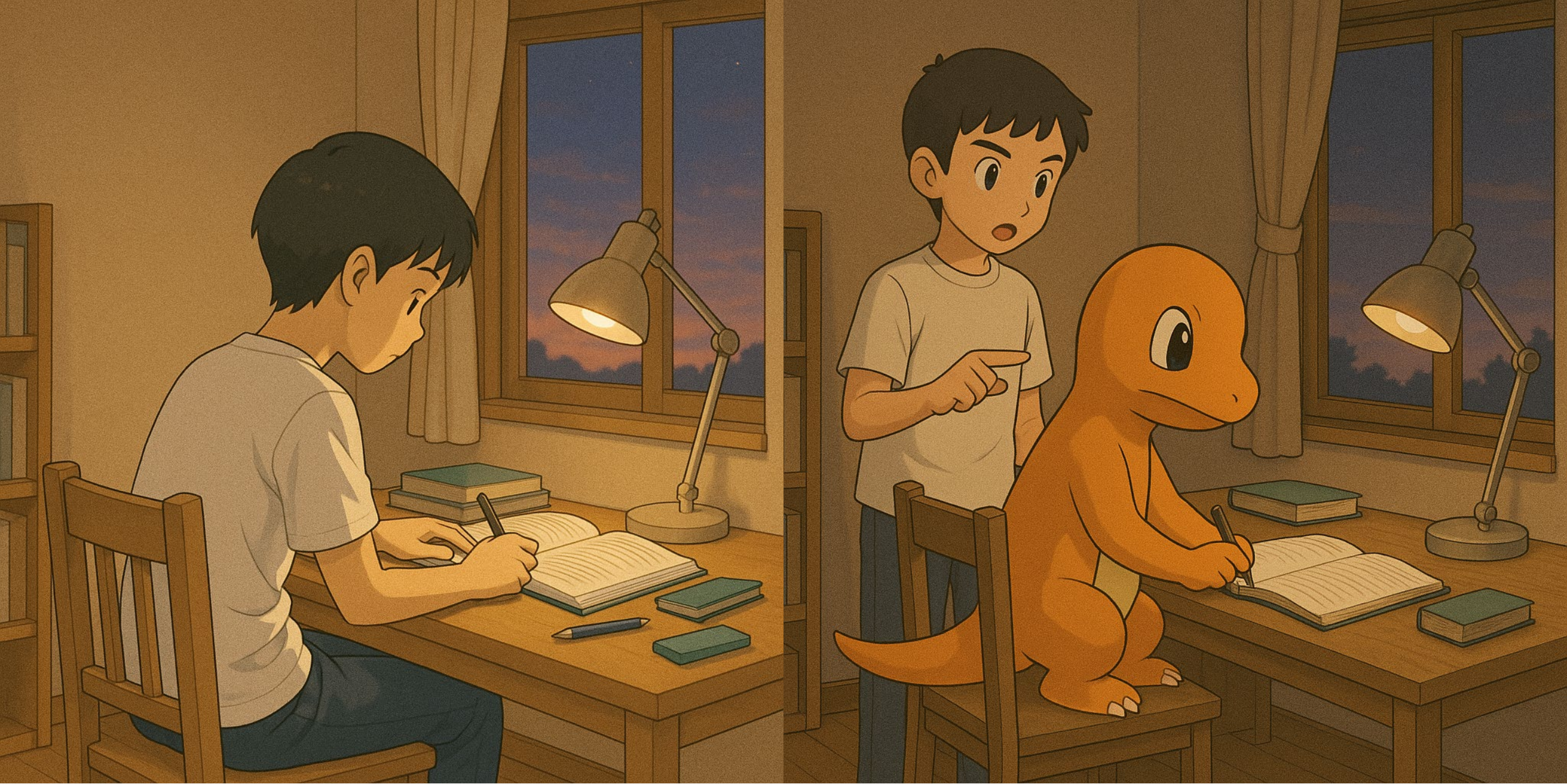
	Rank	Type	Model モデル	Average 平均	MATH 数学	GPQA 化学・生物・物理
👤	1	🔴	MazyarPanahi/calme-3.2-instruct-78b	52.08	40.33	20.36
👤	2	👤	MazyarPanahi/calme-3.1-instruct-78b	51.29	39.27	19.46
👤	3	👤	dfurman/CalmeRys-78B-Orpo-v0.1	51.23	40.63	20.02
👤	4	👤	MazyarPanahi/calme-2.4-rys-78b	50.77	40.71	20.36
👤	5	🔴	huihui-ai/Qwen2.5-72B-Instruct-abliterated	48.11	60.12	19.35
👤	6	👤	Qwen/Qwen2.5-72B-Instruct	47.98	59.82	16.67
👤	7	👤	MazyarPanahi/calme-2.1-qwen2.5-72b	47.86	59.14	15.10
👤	8	🔴	newsbang/Homer-v1.0-Qwen2.5-72B	47.46	49.02	22.15
👤	9	👤	ehristoforu/qwen2.5-test-32b-it	47.37	59.74	15.21
👤	10	🔴	Saxo/Linkbricks-Horizon-AI-Avengers-V1-32B	47.34	60.27	14.99

コンピュータは計算を間違えないのでは？

- 実際に数学の問題を解かせると満点はなかなかとれません
- 人間みたいです
- なぜこうなるのでしょうか？





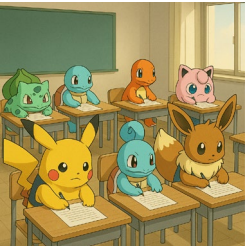


訓練とテスト



1. 訓練: モデルが問題を解けるにするトレーニング

- 人間の試験勉強に似ています
- 初期状態のモデルは本当に何も知らないので、訓練は数学に限らずもっと広い範囲を扱います



2. テスト: 訓練時に見ていない新たな問題（ベンチマーク）をモデルに解かせて性能を評価

最強の~~ポケモン~~モデルを作る競争

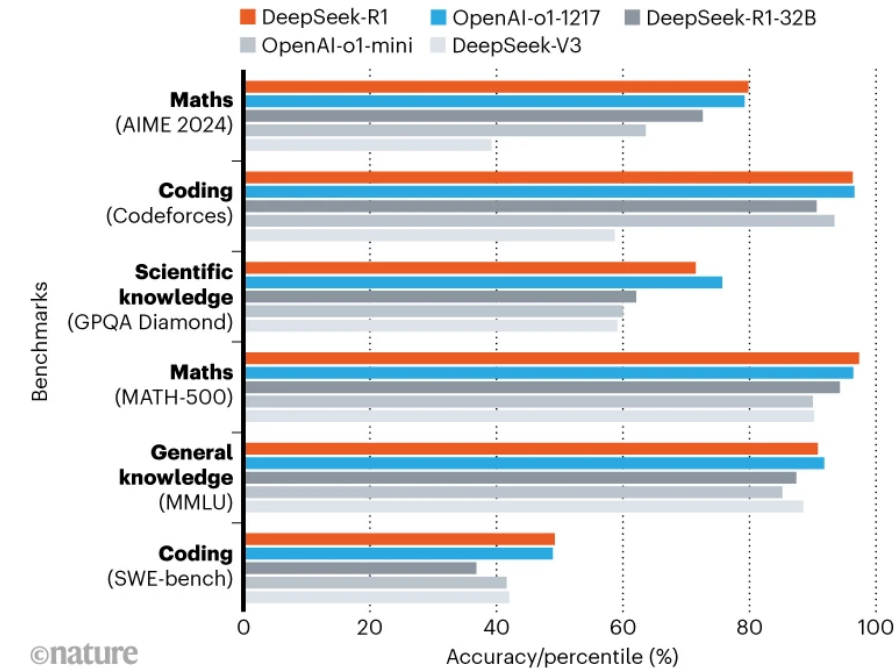
- 入学試験の合否が、自分の成績ではなく、自分が訓練した~~ポケモン~~モデルの成績で決まると言われたらどうしますか？

最強の~~ポケモン~~モデルを作る競争

- 入学試験の合否が、自分の成績ではなく、自分が訓練した~~ポケモン~~モデルの成績で決まると言われたらどうしますか？
- 合否のような一発勝負はあまりありませんが、強いモデルを作った研究者が数千万～数億円の年収で雇われるといったことは起きています

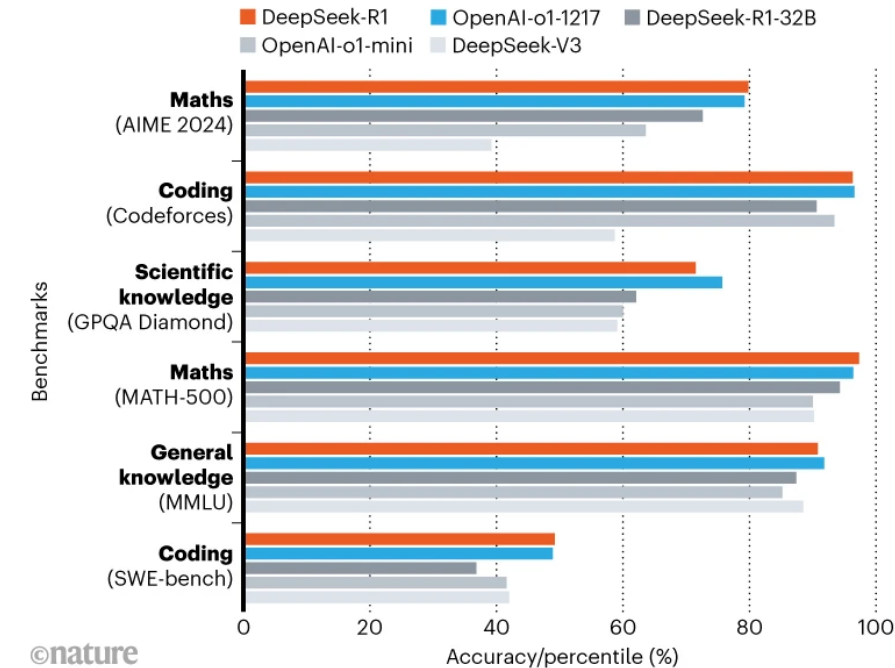
DeepSeek ショック (2025年1月)

- 中国企業DeepSeekが公開したモデル
DeepSeek-R1がアメリカ発のモデルと
同等の性能を発揮



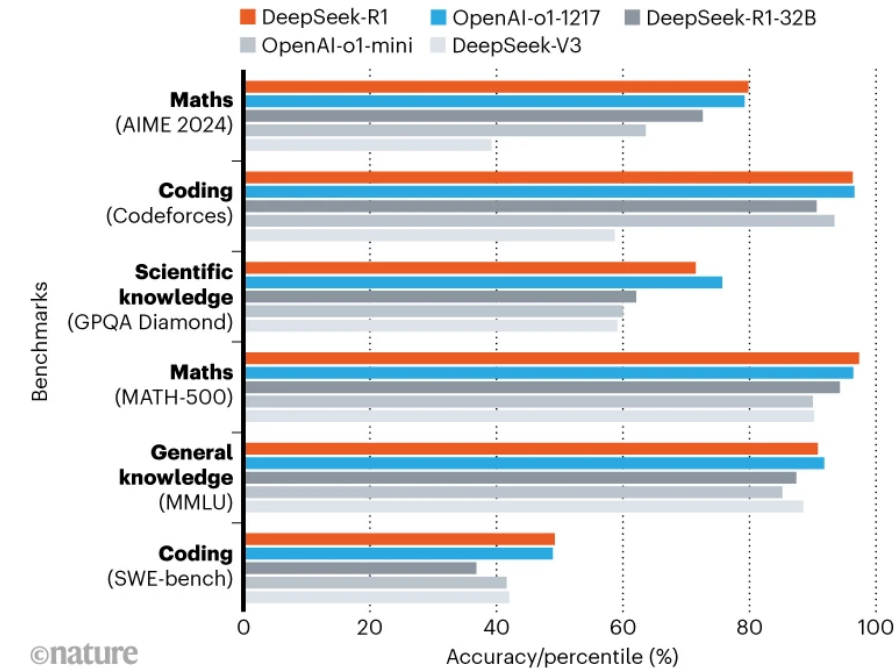
DeepSeek ショック (2025年1月)

- 中国企業DeepSeekが公開したモデル
DeepSeek-R1がアメリカ発のモデルと
同等の性能を発揮
- 約9億円でモデルを訓練したと報告
 - アメリカ企業は数百億円を消費

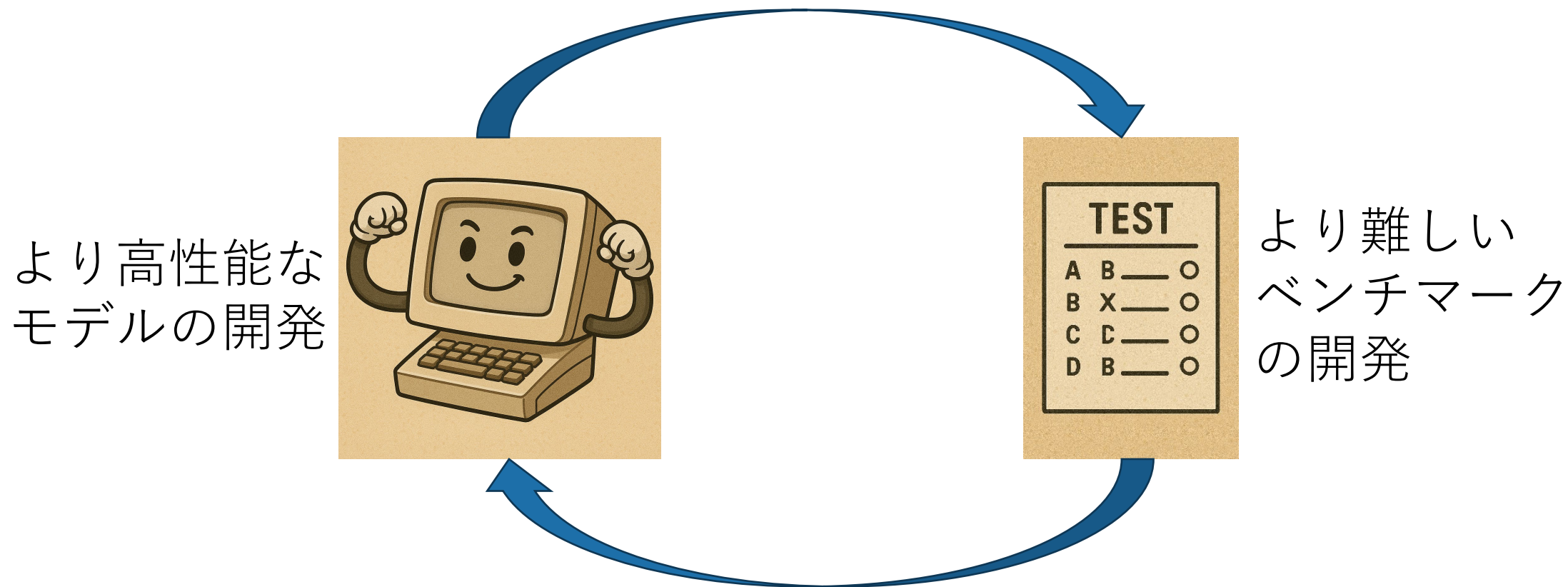


DeepSeek ショック (2025年1月)

- 中国企業DeepSeekが公開したモデル
DeepSeek-R1がアメリカ発のモデルと
同等の性能を発揮
- 約9億円でモデルを訓練したと報告
 - アメリカ企業は数百億円を消費
- アメリカのAI関連主要企業の時価総
額が100兆円ほど消失



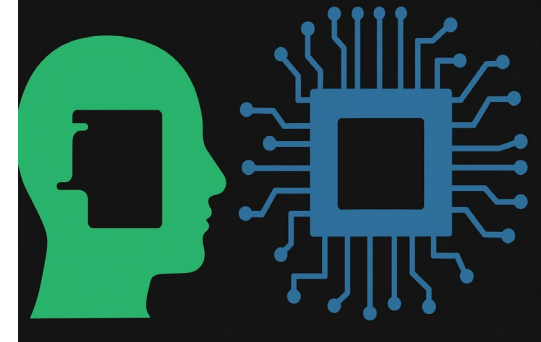
モデルとベンチマークの開発サイクル



数学 (算数) のベンチマーク

- [GSM8K](#) (2021): 小中学校 (**g**rade **s**chool) 相当の算数の問題 (8,500問)
- [MATH](#) (2021): 高校数学の問題 (12,500問)
- [FrontierMath](#) (2024)
 - レベル1-3: 大学～大学院初期レベル
 - レベル4: 研究レベル
- [Omni-MATH](#) (2024): 数学オリンピックレベル
- [HARDMath](#) (2024): 大学院レベルの応用数学問題

人間にとって難しい問題が コンピュータにとっても難しい



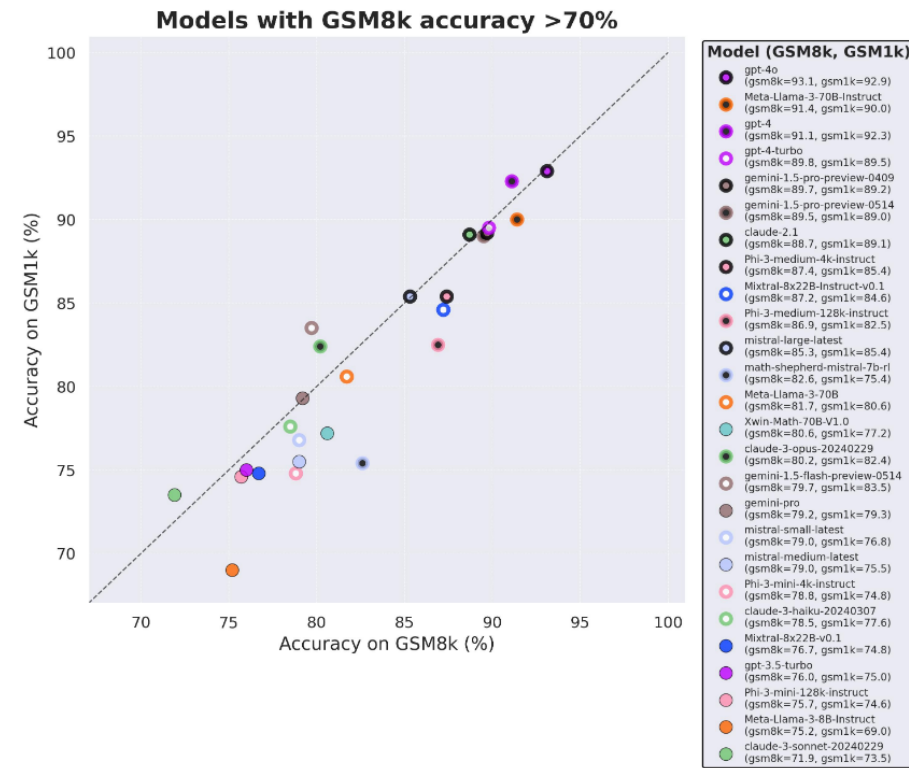
- 当たり前のように当たり前ではありません！
- モラベックのパラドックス (1980年代): AI研究では、人間にとって難しい問題はコンピュータにとって簡単で、コンピュータにとって簡単な問題は人間にとって難しいという状態が長年続いてきました
- 2010年代のAI研究の進展で、以前よりもはるかに人間らしいモデルが作られるようになりました

ベンチマーク汚染 (contamination)

- モデルが訓練時にテスト用のベンチマークを見たらどうなるでしょう？
 - **GSM8K**は古い (2021) ので、新しいモデルは見ている可能性が高い

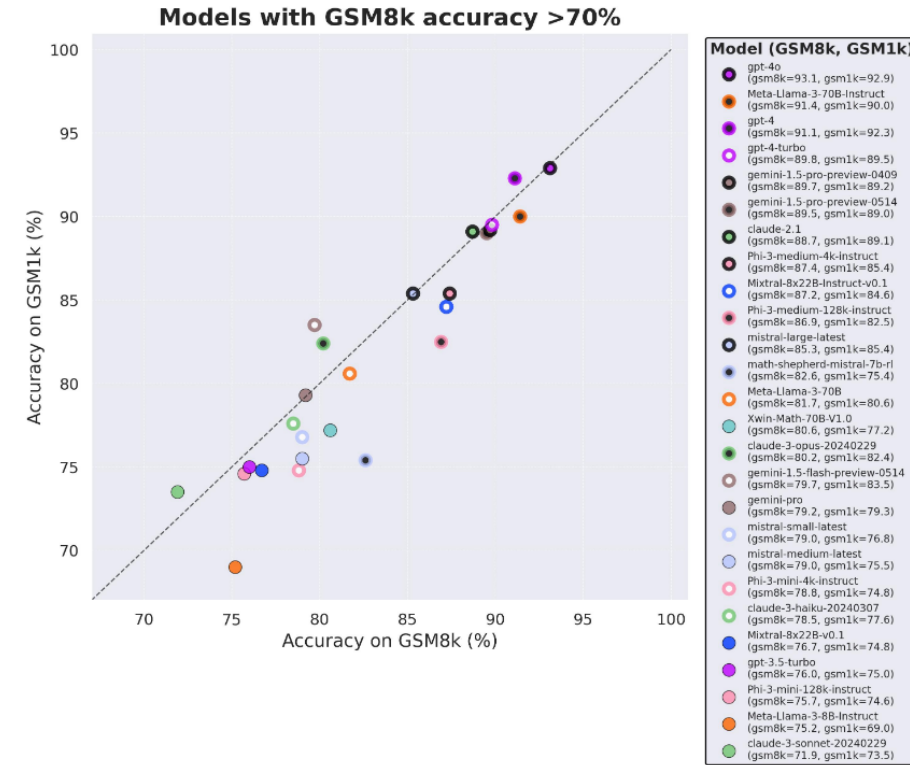
ベンチマーク汚染 (contamination)

- モデルが訓練時にテスト用のベンチマークを見たらどうなるでしょう？
 - GSM8Kは古い (2021) ので、新しいモデルは見ている可能性が高い
- 同じ形式の新しいベンチマーク (GSM1K) で性能評価すると、ほとんどのモデルで性能が悪化



ベンチマーク汚染 (contamination)

- モデルが訓練時にテスト用のベンチマークを見たらどうなるでしょう？
 - GSM8Kは古い (2021) ので、新しいモデルは見ている可能性が高い
- 同じ形式の新しいベンチマーク (GSM1K) で性能評価すると、ほとんどのモデルで性能が悪化
- 訓練時に見る = まる覚えして100% 正解する...わけではありません



講演の紹介文から

この講義では、人間が自ら数学（算数）の問題を解くのではなく、代わりにコンピュータに解かせるという設定を考えます。そのためには、人間はコンピュータに何をどのように教えれば良いのでしょうか？この問いを探ることで、私たち自身の知的活動の本質が見えてきます。講義の中では、ChatGPTに代表される大規模言語モデルの最新の研究動向を紹介しつつ、人間とコンピュータの知性の共通点や違いについても考えていきます。

GSM8Kの問題例

Tina buys 3 12-packs of soda for a party. Including Tina, 6 people are at the party. Half of the people at the party have 3 sodas each, 2 of the people have 4, and 1 person has 5. How many sodas are left over when the party is over?

GSM8Kの問題例

ティナはパーティーのために12本入りのソーダを3個買います。パーティーにはティナを含めて6人が参加しています。参加者の半数はそれぞれ3本、2人は4本、1人は5本持っています。パーティーが終わったとき、ソーダは何本残っていますか？

GSM8Kの問題例

ティナはパーティーのために12本入りのソーダを3個買います。パーティーにはティナを含めて6人が参加しています。参加者の半数はそれぞれ3本、2人は4本、1人は5本持っています。パーティーが終わったとき、ソーダは何本残っていますか？

解答: $(3 \times 12) - (6 \div 2) \times 3 - 2 \times 4 - 5 = 14$

ティナはパーティーのために12本入りのソーダを3個買います。パーティーにはティナを含めて6人が参加しています。参加者の半数はそれぞれ3本、2人は4本、1人は5本持っています。パーティーが終わったとき、ソーダは何本残っていますか？

まず、ソーダの総数を計算します。

- ティナが買ったソーダの総数:
 $12 \text{ 本} \times 3 = 36 \text{ 本}$

次に、消費されたソーダの本数を計算します。

- 参加者の半数（6人の半数 = 3人）は、それぞれ3本ずつ飲む:
 $3 \text{ 人} \times 3 \text{ 本} = 9 \text{ 本}$
- 2人はそれぞれ4本飲む:
 $2 \text{ 人} \times 4 \text{ 本} = 8 \text{ 本}$
- 1人は5本飲む:
 $1 \text{ 人} \times 5 \text{ 本} = 5 \text{ 本}$

飲まれた本数の合計は:

$$9 + 8 + 5 = 22 \text{ 本}$$

最後に、残りのソーダ本数は:

$$36 - 22 = 14 \text{ 本}$$

答え: 14本



質問してみましょう

Tina buys 3 12-packs of soda for a party. Including Tina, 6 people are at the party. Half of the people at the party have 3 sodas each, 2 of the people have 4, and 1 person has 5. How many sodas are left over when the party is over?

Let's solve this step by step.

Step 1: Total sodas Tina bought.

Tina buys 3 12-packs, so:

$$3 \times 12 = 36 \text{ sodas.}$$

Step 2: Determine how many people are in each group.

There are 6 people total.

- Half of the people ($6 \div 2 = 3$ people) have 3 sodas each.
- 2 people have 4 sodas each.
- 1 person has 5 sodas.

Step 3: Calculate total sodas consumed.

- Group 1: $3 \text{ people} \times 3 \text{ sodas} = 9 \text{ sodas.}$
- Group 2: $2 \text{ people} \times 4 \text{ sodas} = 8 \text{ sodas.}$
- Group 3: $1 \text{ person} \times 5 \text{ sodas} = 5 \text{ sodas.}$

Total consumed:

$$9 + 8 + 5 = 22 \text{ sodas.}$$

Step 4: Find leftovers.

$$36 - 22 = 14 \text{ sodas left over.}$$

Answer:

14 sodas are left over when the party is over.



曖昧性？

ティナはパーティーのために12本入りのソーダを3個買います。パーティーにはティナを含めて6人が参加しています。参加者の半数はそれぞれ3本、2人は4本、1人は5本持っています。パーティーが終わったとき、ソーダは何本残っていますか？

別解: 2人であわせて4本と解釈すると
 $(3 \times 12) - (6 \div 2) \times 3 - 4 - 5 = 18$

曖昧性？

ティナはパーティーのために12本入りのソーダを3個買います。パーティーにはティナを含めて6人が参加しています。参加者の半数はそれぞれ3本、2人は4本、1人は5本持っています。パーティーが終わったとき、ソーダは何本残っていますか？

別解: 2人であわせて4本と解釈すると
 $(3 \times 12) - (6 \div 2) \times 3 - 4 - 5 = 18$

常識的には2人がそれぞれ4本ですが、誤読の余地はあります

この問題を解くには...

1. テキストを正しく理解して数式に変換
 2. 数式を正しく計算
- しなければなりません

この問題を解くには...

1. テキストを正しく理解して数式に変換

2. 数式を正しく計算

しなければなりません

- 1の読解能力をコンピュータに与えることが長年困難でした
- 2010年代後半からブレークスルーが相次ぎました
- その中核が大規模言語モデルです

大規模言語モデル

1. 言語モデルです
2. ニューラルネットワークでモデルを構成しています
3. 大規模です

言語モデル

次の単語を予測するモデル: 吾輩 は ?

言語モデル (ニューラルネットではない)

次の単語を予測するモデル: 吾輩は ?

条件付き確率

- $$P(\text{猫} | \text{吾輩, は}) = \frac{\text{頻度}(\text{吾輩, は, 猫})}{\text{頻度}(\text{吾輩, は})}$$
$$= \frac{13100}{19265} = 0.68$$
- $$P(\text{ネズミ} | \text{吾輩, は}) = \frac{\text{頻度}(\text{吾輩, は, ネズミ})}{\text{頻度}(\text{吾輩, は})}$$
$$= \frac{770}{19265} = 0.04$$

大規模テキスト
(例: 3,000億単語)

吾輩は猫である。...

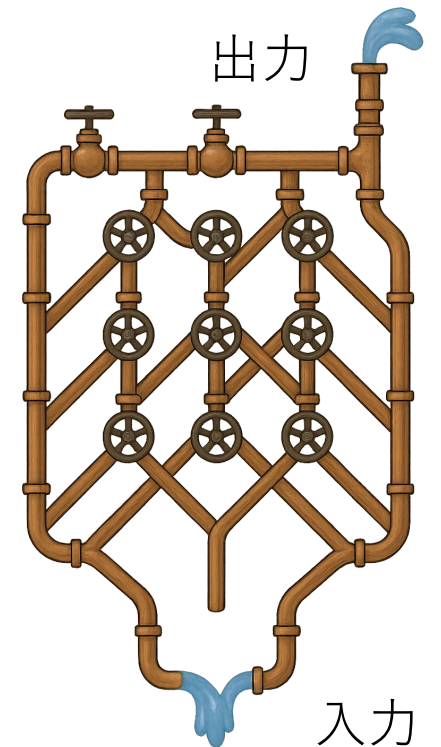
「吾輩は猫である」を読んだ。

吾輩はネズミを取るより、...

そして吾輩は運動し、...

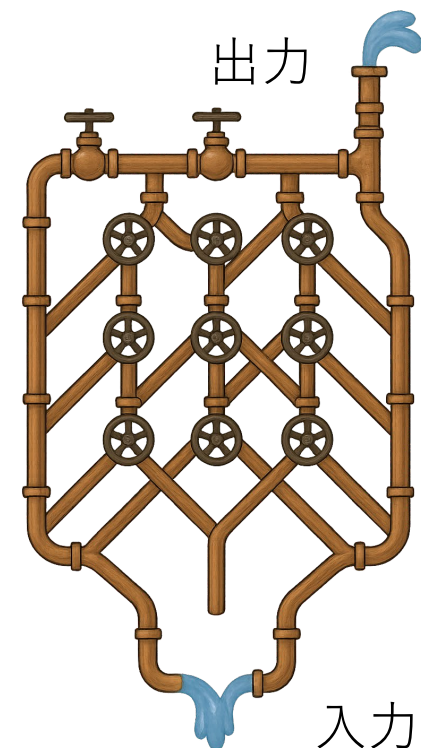
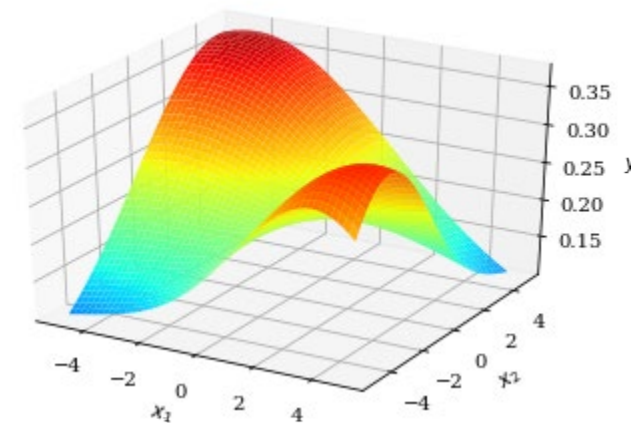
ニューラルネット

- 入力に応じた出力を出します
- 入出力とも連続値
- 内部に無数（数百億とか）のバルブ（**パラメータ**）があり、段階的に入力を変換していきます

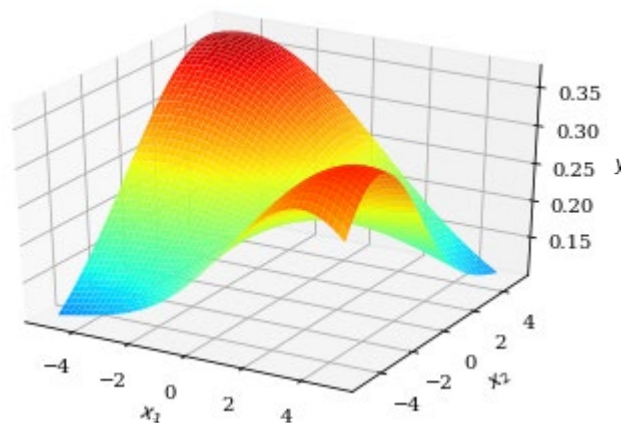


ニューラルネット

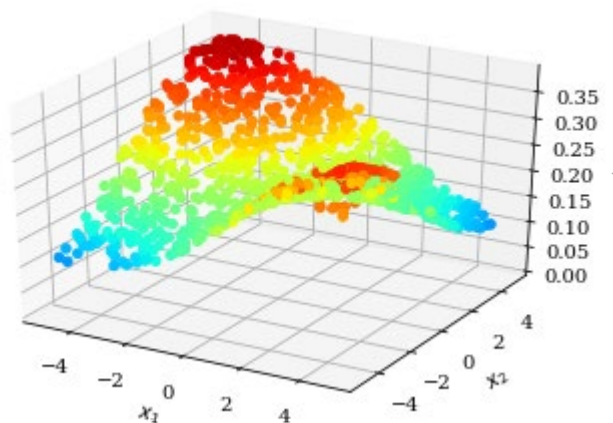
- 入力に応じた出力を出します
- 入出力とも連続値
- 内部に無数（数百億とか）のバルブ（**パラメータ**）があり、段階的に入力を変換していきます
- **訓練**: 入力に対して希望の出力が得られるようにパラメータを調節
 - 実は微分が大活躍します



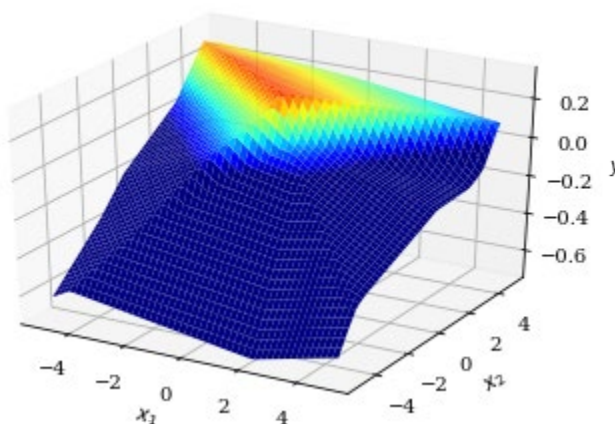
ニューラルネットの訓練



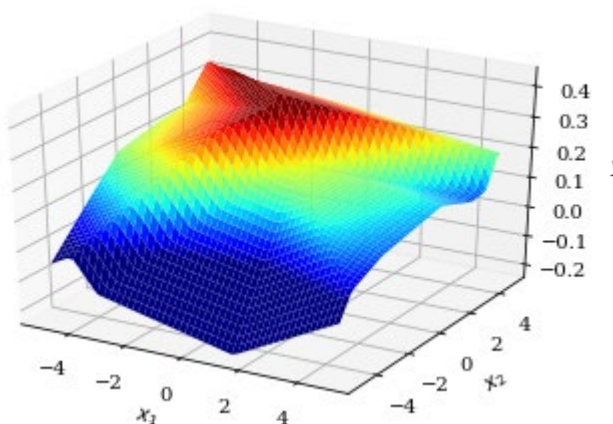
再現したい入出力関係



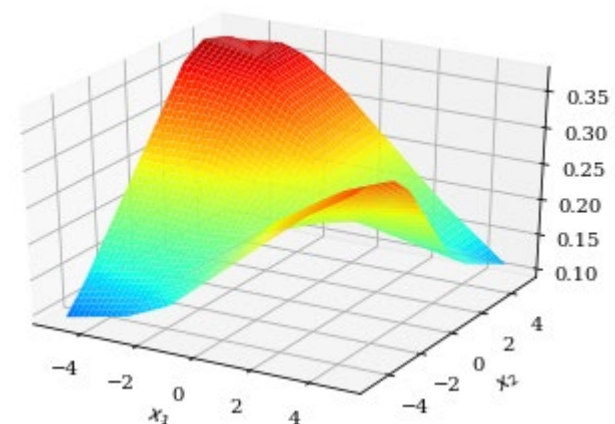
訓練データ



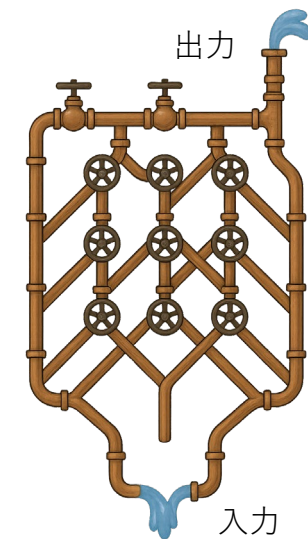
初期状態のモデル



100回のパラメータ更新後

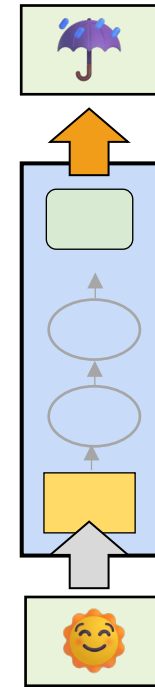


訓練終了後のモデル



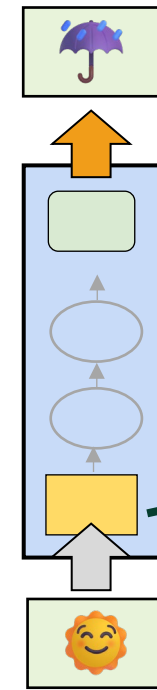
ニューラルネットで記号を扱う

- 準備として、その日の天気から翌日の天気を予測する簡単なモデルを考えます
- 天気は ☀️ 🌤️ 🌧️ の3種類とします
- ニューラルネットは連続値しか扱えないので、入口と出口に細工をします



ニューラルネットで記号を扱う

- 準備として、その日の天気から翌日の天気を予測する簡単なモデルを考えます
- 天気は ☀️ 🌤️ 🌧️ の3種類とします
- ニューラルネットは連続値しか扱えないので、入口と出口に細工をします

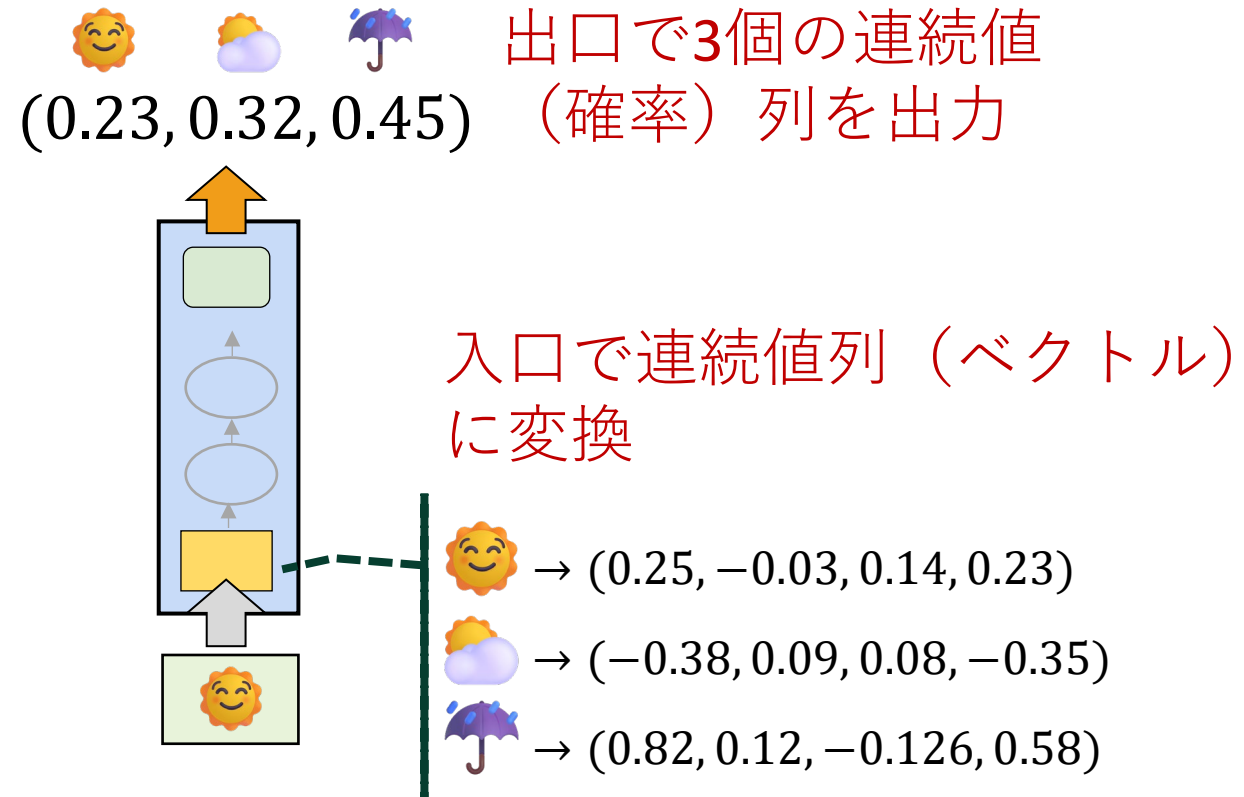


入口で連続値列（ベクトル）に変換

☀️ → (0.25, -0.03, 0.14, 0.23)
🌤️ → (-0.38, 0.09, 0.08, -0.35)
🌧️ → (0.82, 0.12, -0.126, 0.58)

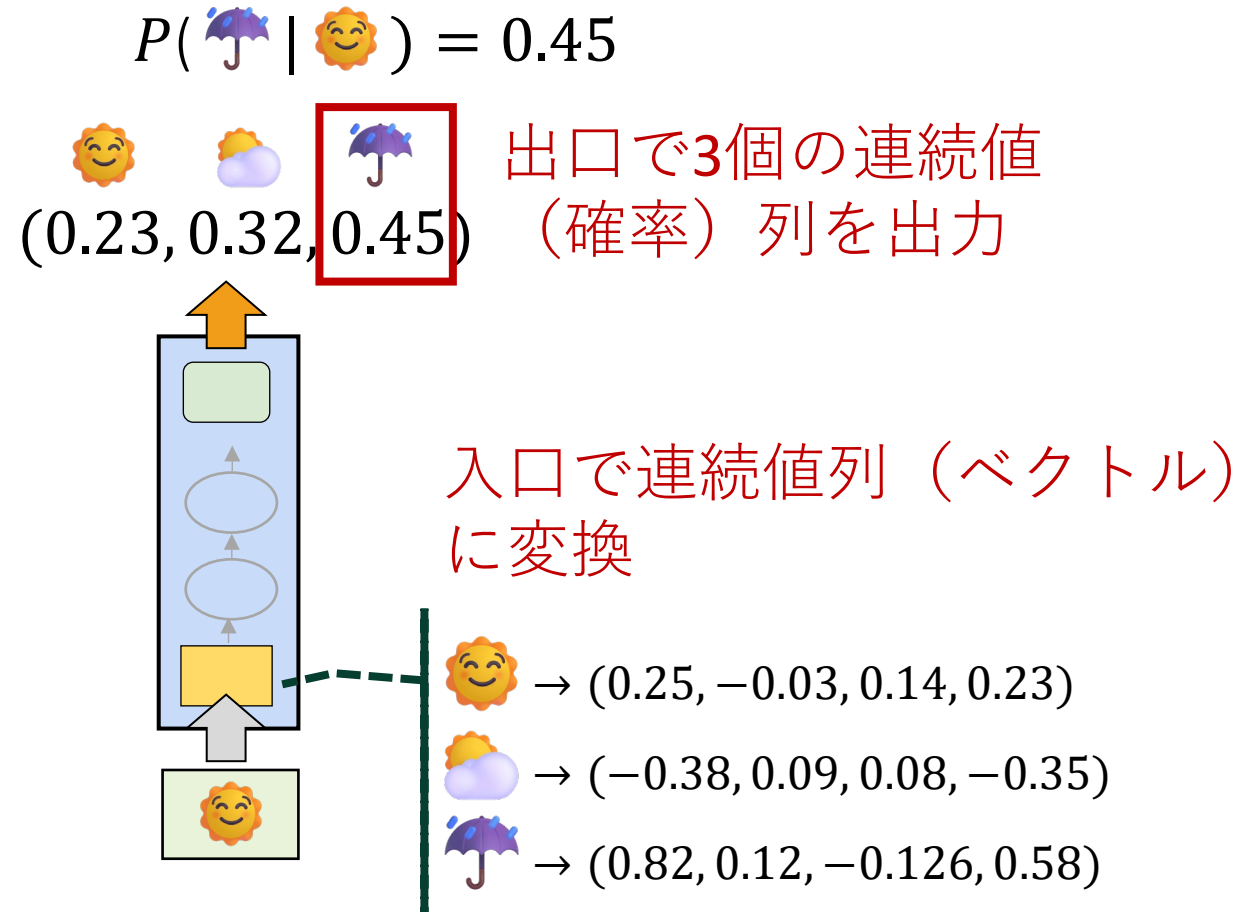
ニューラルネットで記号を扱う

- 準備として、その日の天気から翌日の天気を予測する簡単なモデルを考えます
- 天気は ☀️ 🌤️ 🌂 の3種類とします
- ニューラルネットは連続値しか扱えないので、入口と出口に細工をします



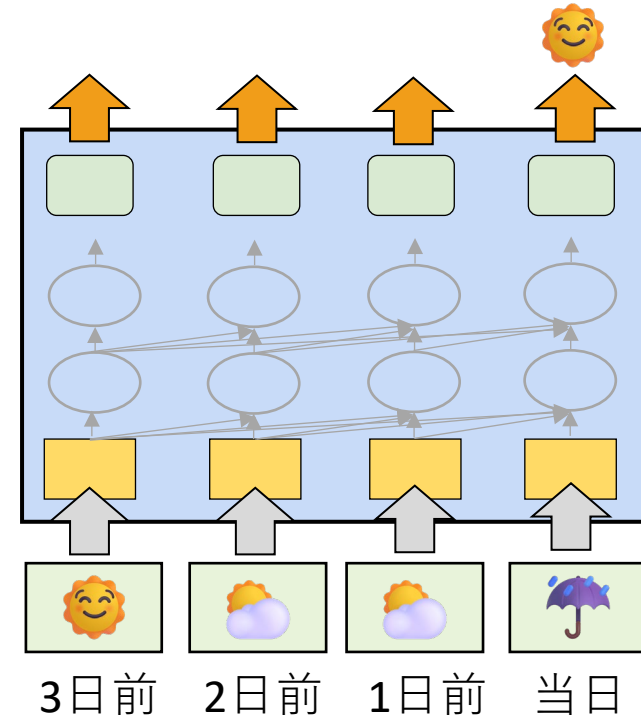
ニューラルネットで記号を扱う

- 準備として、その日の天気から翌日の天気を予測する簡単なモデルを考えます
- 天気は ☀️ 🌤️ 🌂 の3種類とします
- ニューラルネットは連続値しか扱えないので、入口と出口に細工をします



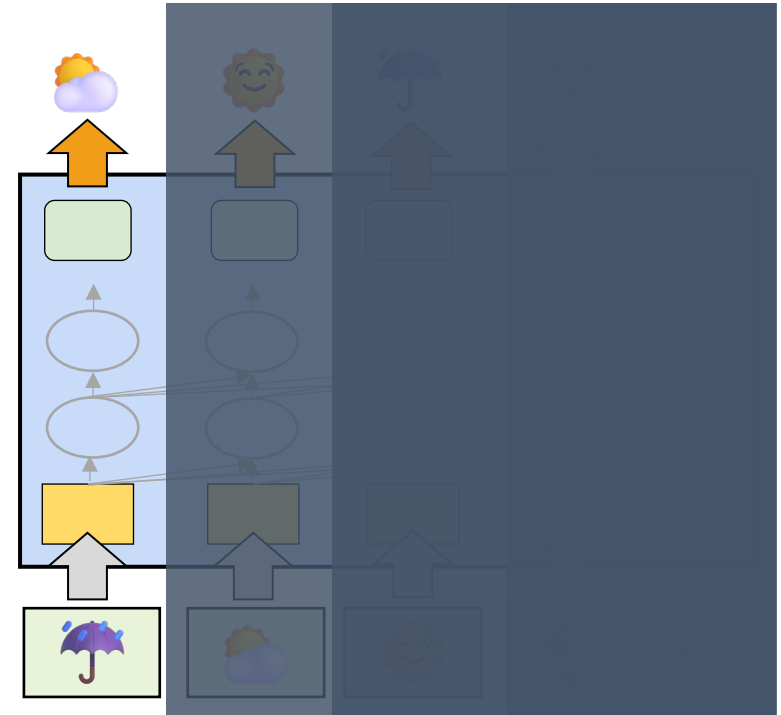
ニューラルネットで系列を扱う 1/2

- その日だけでなく、これまでの天気の**系列**から翌日の天気を予測するようにモデルを拡張



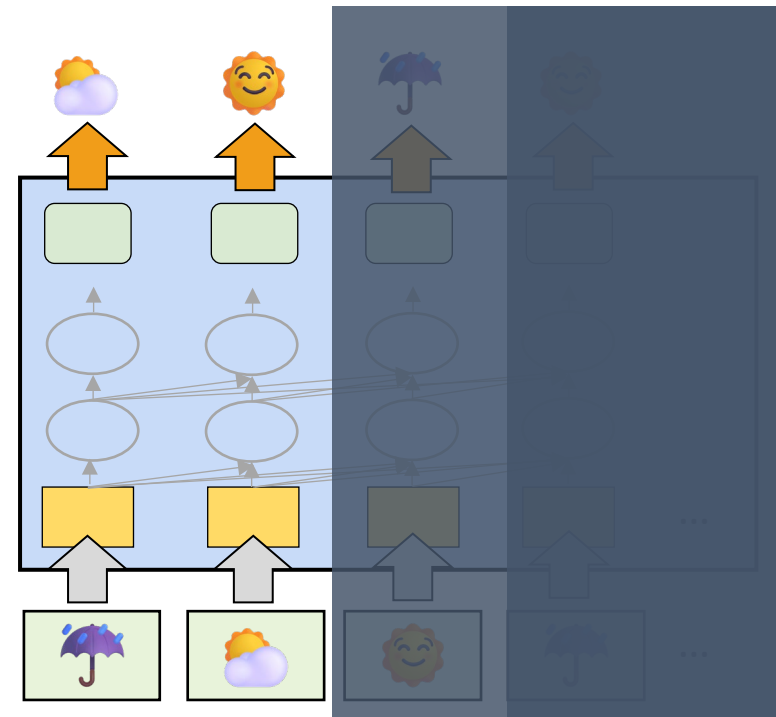
ニューラルネットで系列を扱う 2/2

- 訓練: 系列の訓練データをなるべく再現するようにパラメータを更新



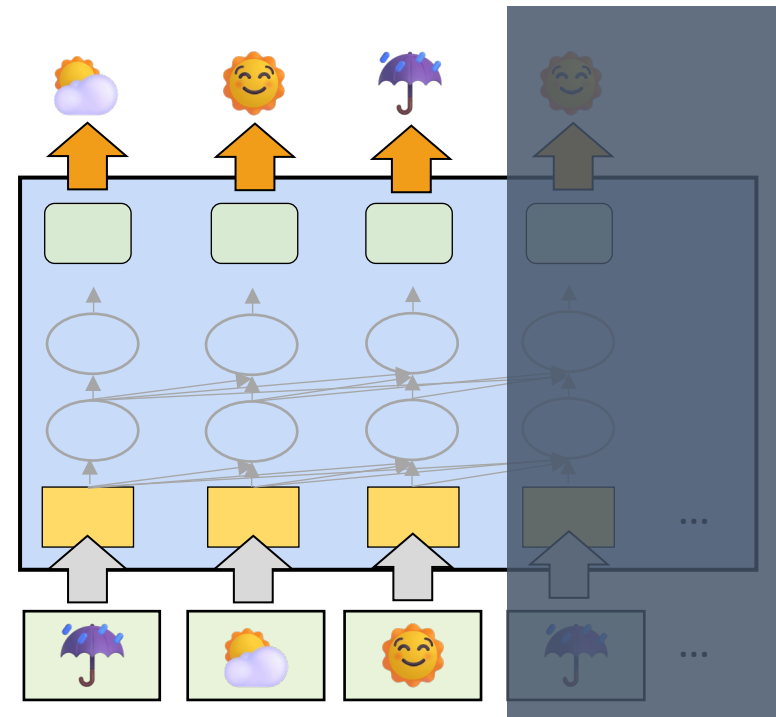
ニューラルネットで系列を扱う 2/2

- 訓練: 系列の訓練データを用いてパラメータを更新



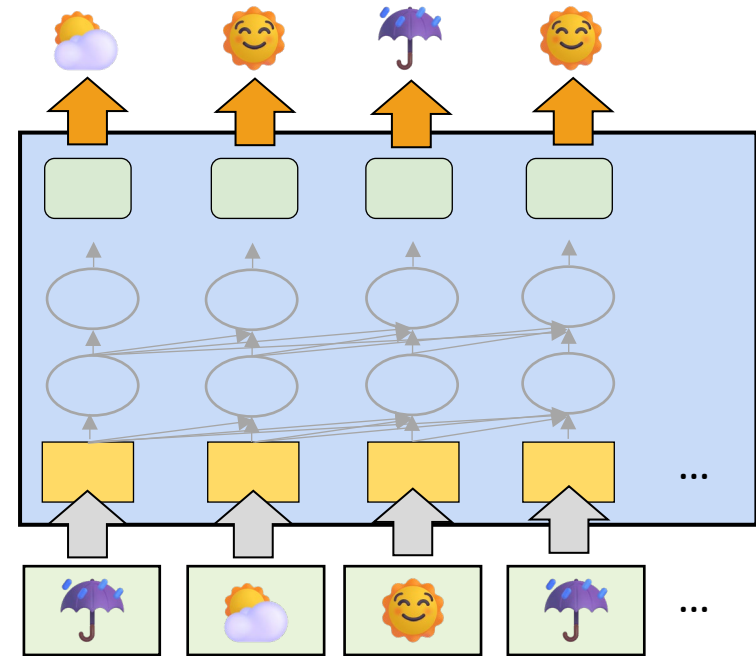
ニューラルネットで系列を扱う 2/2

- 訓練: 系列の訓練データを用いてパラメータを更新



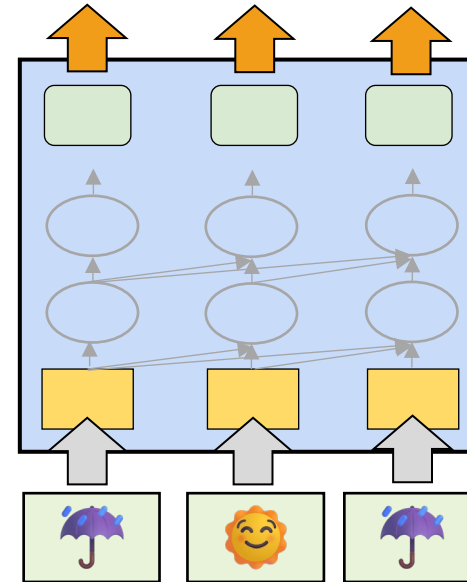
ニューラルネットで系列を扱う 2/2

- 訓練: 系列の訓練データをはなるべく再現するようにパラメータを更新



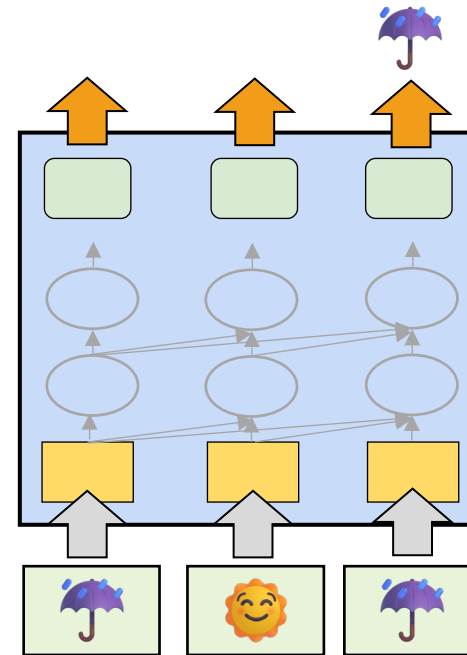
ニューラルネットで系列を生成

- 訓練済みのモデルを用意
- 途中までの系列を与えて、その先を予測
- これを繰り返すと系列が生成できます



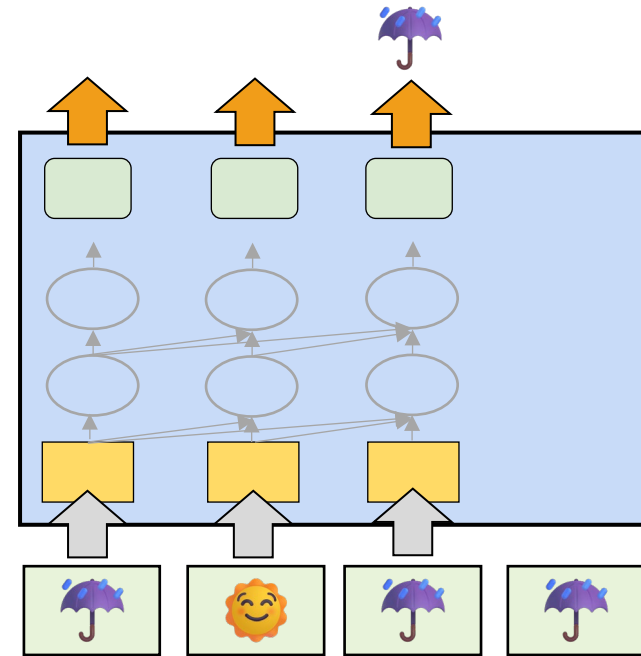
ニューラルネットで系列を生成

- 訓練済みのモデルを用意
- 途中までの系列を与えて、その先を予測
- これを繰り返すと系列が生成できます



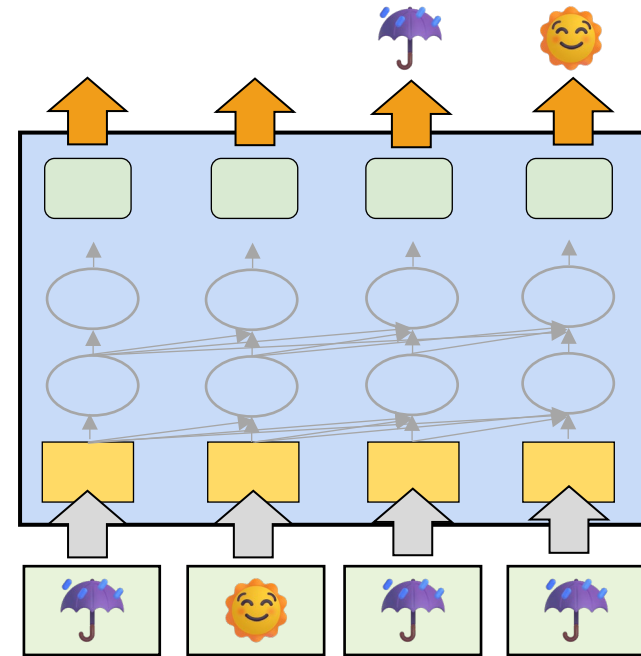
ニューラルネットで系列を生成

- 訓練済みのモデルを用意
- 途中までの系列を与えて、その先を予測
- これを繰り返すと系列が生成できます



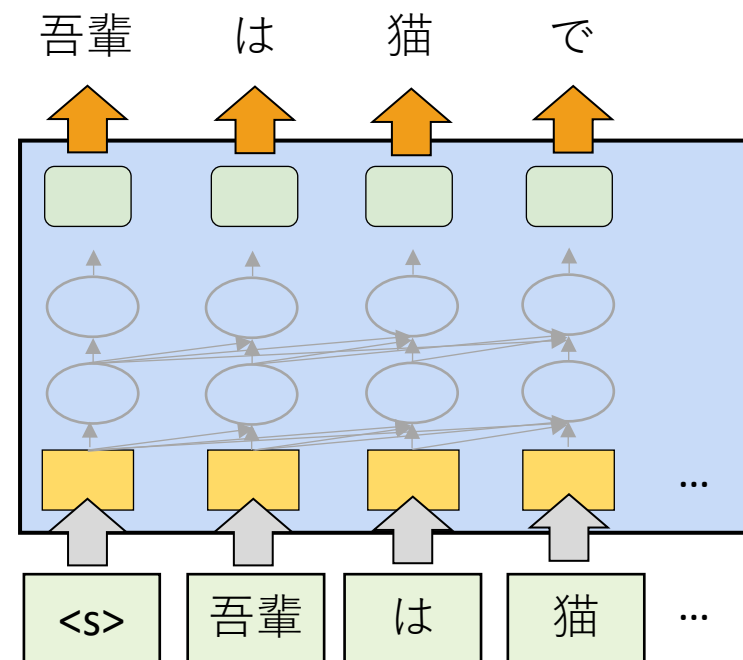
ニューラルネットで系列を生成

- 訓練済みのモデルを用意
- 途中までの系列を与えて、その先を予測
- これを繰り返すと系列が生成できます



ニューラル言語モデル

- 構造は天気系列モデルを同じ
- 記号の異なり数が一気に増えます (3→20万)
 - テキストの境界を表す特殊記号 (<s>, </s>) も
 - モデルが</s>を出力したら生成終了



ニューラル言語モデルの大規模化

ニューラル言語モデルを

- 大きくして
- 大量のテキストで訓練し
- 大量の計算資源を使う

だけで賢くなることが**2018**年頃からわかってきました

こんな雑な方法で賢くなるとは思っていませんでした

ニューラル言語モデルの大規模化



ニューラル言語モデルを

- 大きくして
- 大量のテキストで訓練し
- 大量の計算資源を使う

パラメータ数: 数千億

単語数: 数兆 (新聞数十万年分)

数万世帯の年間消費電力

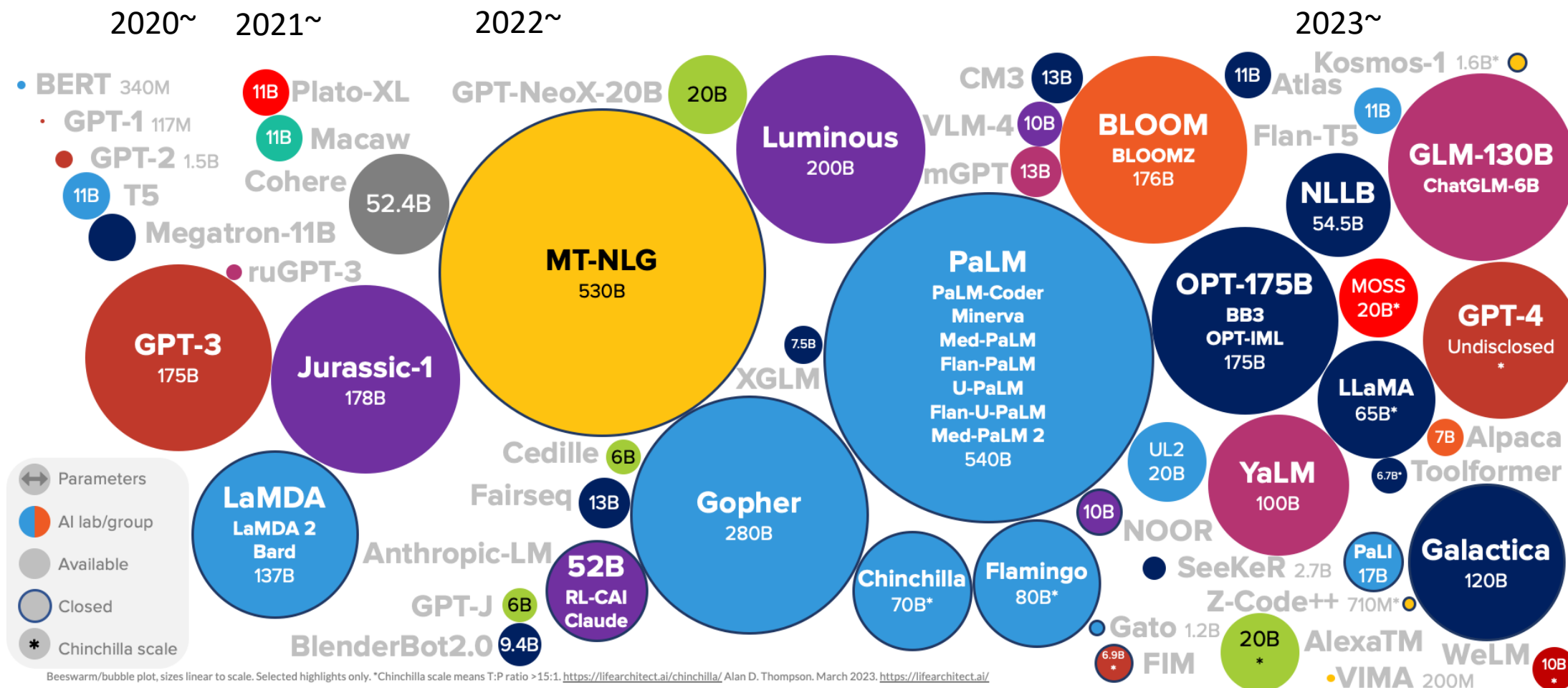
だけで賢くなることが2018年頃からわかってきました

こんな雑な方法で賢くなるとは思っていませんでした

言語モデルの大規模化競争

M: 百万
B: 十億

大規模化競争の
終わり？



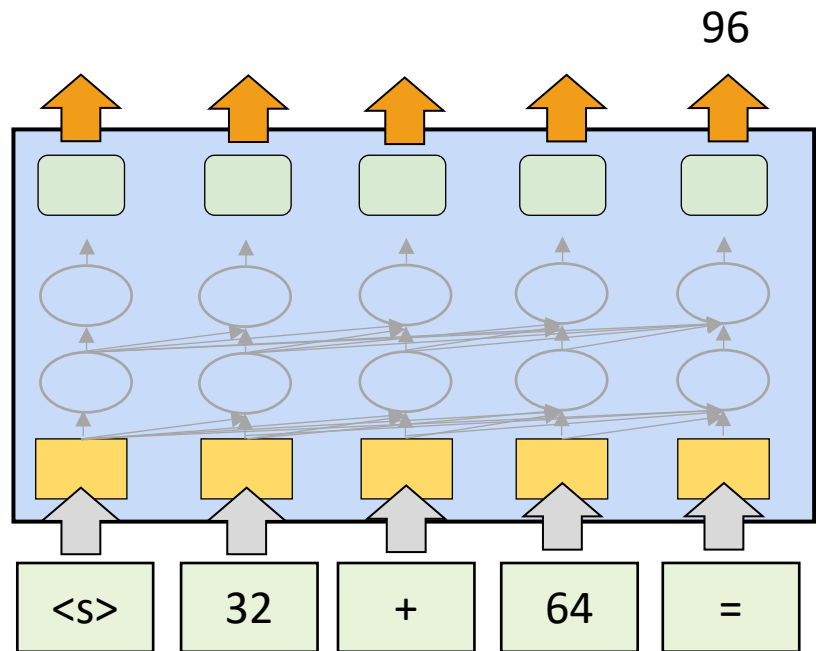
大規模言語モデルは何をしている？

- 前置き: 先に動くモデルができてから、どうして動くのかを解明するという順番で研究が進んでいます
- 出入口で連続値に変換するので、テキストをまる覚えしているわけではありません
- 無数のテキストで訓練されるなかで、テキスト間で共通するパターンを見つけ出しているようです
- モデルを大規模化すると、抽象度の高いパターン (概念) も獲得できるようになるようです

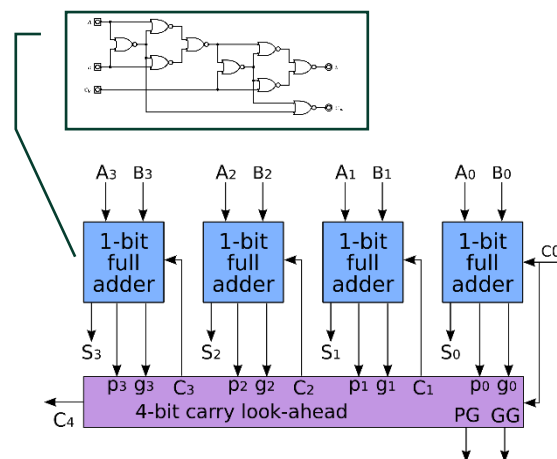
次の単語が予測できると世界がわかる？

- 太郎が飼っている犬はとても_____ [文法]
- 好みでない部分もありましたが、全体としてはこの映画は_____ [談話関係、感情極性]
- この{包丁/電池}は{よく/すぐ}切れるのであなたにすすめし_____ [世界知識]
- 米国の第47代大統領は_____ [世界知識]
- 以下の数列を考えています: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, _____ [フィボナッチ数列]

大規模言語モデルで演算？

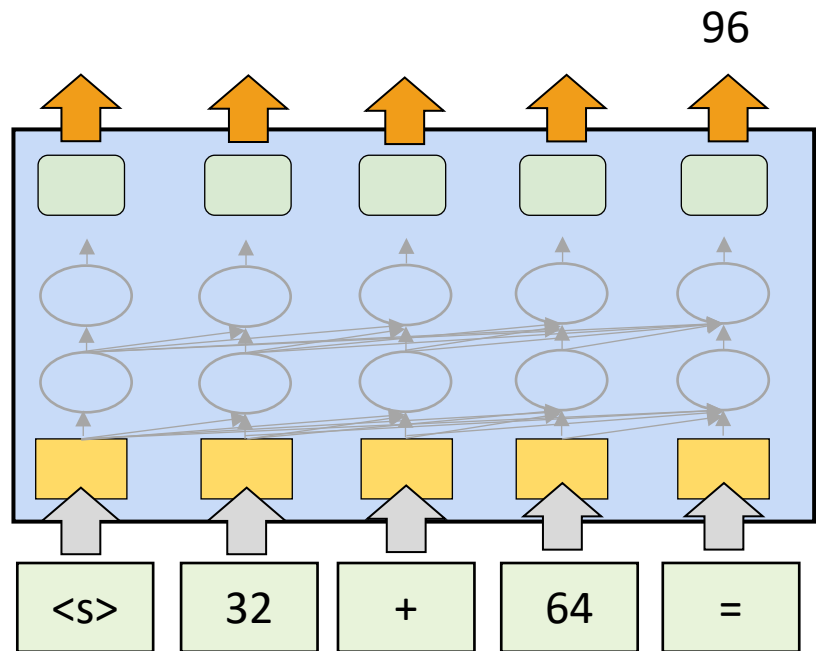


VS

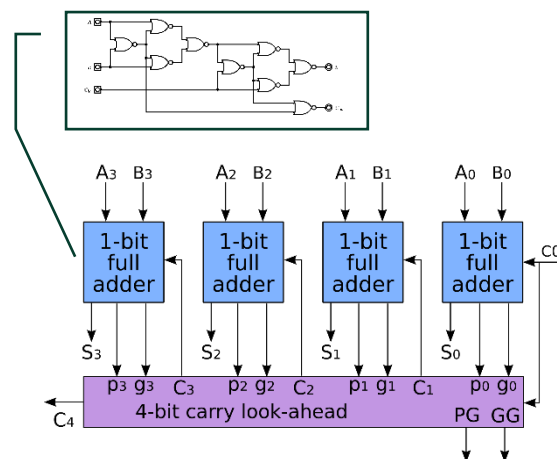


- コンピュータは演算回路を備えています
- 大規模言語モデルに結果を生成させると ? 倍の演算量です

大規模言語モデルで演算？

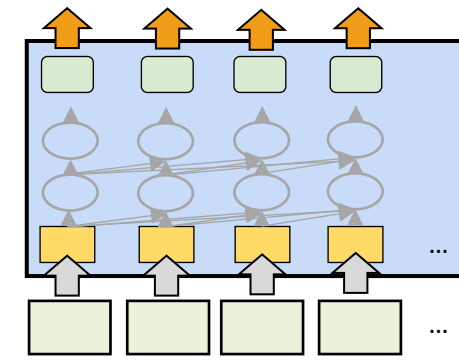


VS



- コンピュータは演算回路を備えています
- 大規模言語モデルに結果を生成させると百億～一兆倍の演算量です
- しかも**100%**正しい結果が得られる保証はありません

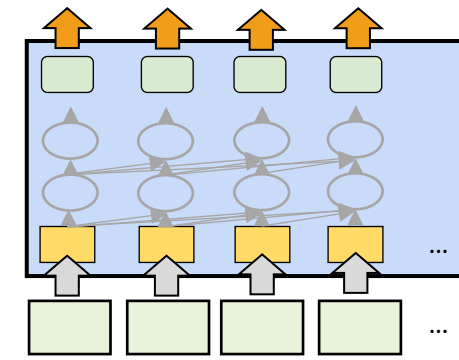
言語モデルによるテキスト生成で 問題が解ける？



<s>Tina buys 3 12-packs of soda for a party. Including Tina, 6 people are at the party. Half of the people at the party have 3 sodas each, 2 of the people have 4, and 1 person has 5. How many sodas are left over when the party is over?

(この続きを言語モデルに生成させると？)

言語モデルによるテキスト生成で 問題が解ける？

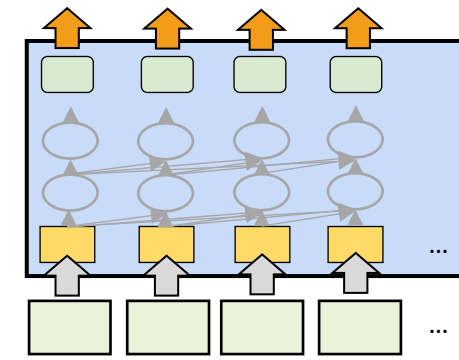


<s>Tina buys 3 12-packs of soda for a party. Including Tina, 6 people are at the party. Half of the people at the party have 3 sodas each, 2 of the people have 4, and 1 person has 5. How many sodas are left over when the party is over?

There aren't as many people at the party as there were at the day before, so there are 6 people at the party, but this year there weren't as many drinks as at the day before. The party was still running pretty smoothly, and the turnout was good.

...

言語モデルによるテキスト生成で 問題が解ける？



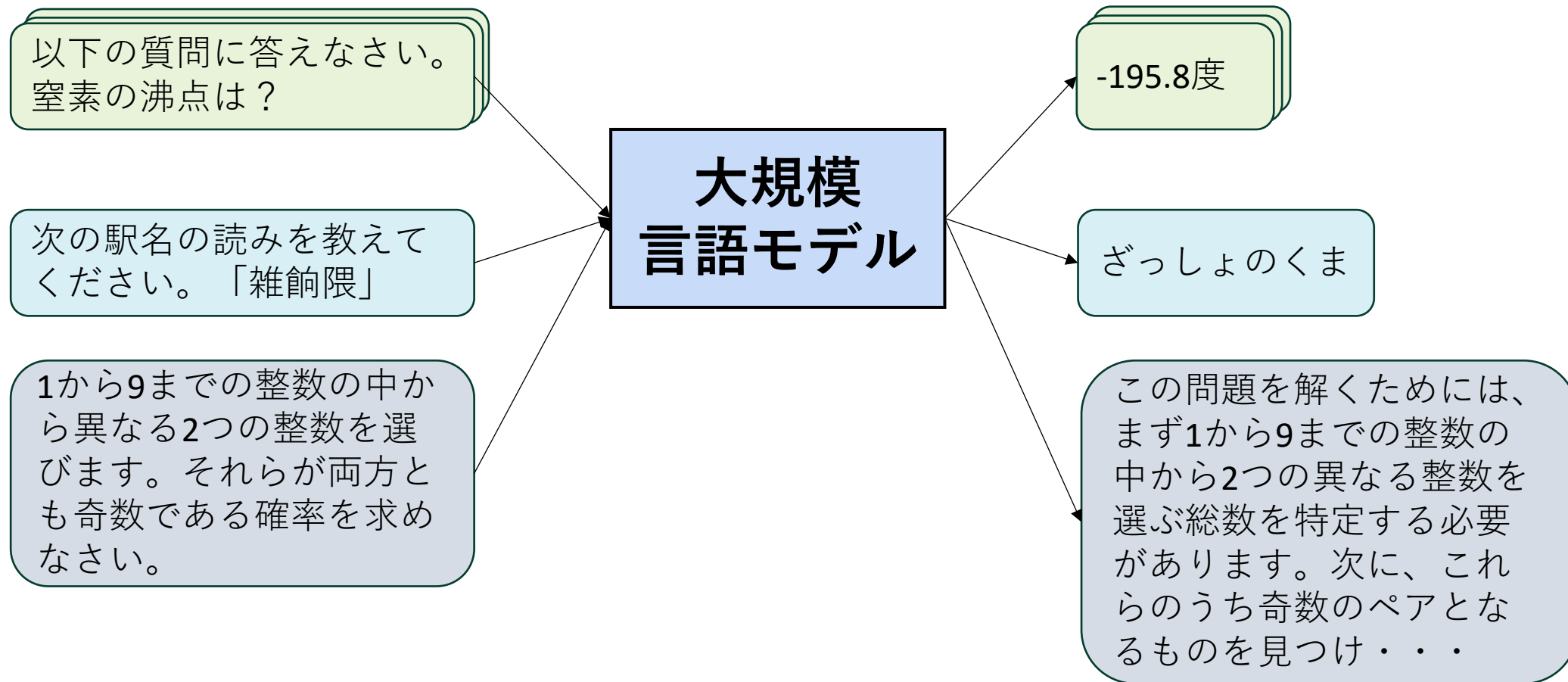
<s>Tina buys 3 12-packs of soda for a party. Including Tina, 6 people are at the party. Half of the people at the party have 3 sodas each, 2 of the people have 4, and 1 person has 5. How many sodas are left over when the party is over?

There aren't as many people at the party as there were at the day before, so there are 6 people at the party, but this year there weren't as many drinks as at the day before. The party was still running pretty smoothly, and the turnout was good.

...

それらしい続きを生成するだけで、
問題に答えてくれるとは限らない

指示チューニング (追加の訓練)



思考の連鎖 (CoT, chain-of-thought reasoning)

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

A: The answer is ?

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

A:

?

思考の連鎖 (CoT, chain-of-thought reasoning)

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

A: The answer is 27. ✖

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

A:

?

思考の連鎖 (CoT, chain-of-thought reasoning)

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

A: The answer is 27. ❌

もっともらしいけど、
でたらめな答えが生成
されています

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

A:

?

思考の連鎖 (CoT, chain-of-thought reasoning)

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

A: The answer is 27. ✖

もっともらしいけど、
でたらめな答えが生成
されています

Q: The cafeteria had 23 apples. If they used 20 to make lunch and bought 6 more, how many apples do they have?

A: The cafeteria had 23 apples originally. They used 20 to make lunch. So they had $23 - 20 = 3$. They bought 6 more apples, so they have $3 + 6 = 9$. The answer is 9. ○

発展: より長いCoTを要する問題

Problem

For each positive integer n let a_n be the least positive integer multiple of 23 such that $a_n \equiv 1 \pmod{2^n}$. Find the number of positive integers n less than or equal to 1000 that satisfy $a_n = a_{n+1}$.

各正の整数 n に対して、 a_n を次を満たす23の倍数のうち最小の正の整数とする。

$$a_n \equiv 1 \pmod{2^n}$$

このとき、1000以下の正の整数 n のうち、 $a_n = a_{n+1}$ を満たすものは何個あるか求めよ。

Solution 1

Denote $a_n = 23b_n$. Thus, for each n , we need to find smallest positive integer k_n such that

$$23b_n = 2^n k_n + 1.$$

Thus, we need to find smallest k_n such that

$$2^n k_n \equiv -1 \pmod{23}.$$

Now, we find the smallest m , such that $2^m \equiv 1 \pmod{23}$. By Fermat's Theorem, we must have $m \mid \phi(23)$. That is, $m \mid 22$. We find $m = 11$.

Therefore, for each n , we need to find smallest k_n such that

$$2^{\text{Rem}(n, 11)} k_n \equiv -1 \pmod{23}.$$

We have the following results:

If $\text{Rem}(n, 11) = 0$, then $k_n = 22$ and $b_n = 1$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 1$, then $k_n = 11$ and $b_n = 1$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 2$, then $k_n = 17$ and $b_n = 3$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 3$, then $k_n = 20$ and $b_n = 7$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 4$, then $k_n = 10$ and $b_n = 7$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 5$, then $k_n = 5$ and $b_n = 7$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 6$, then $k_n = 14$ and $b_n = 39$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 7$, then $k_n = 7$ and $b_n = 39$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 8$, then $k_n = 15$ and $b_n = 167$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 9$, then $k_n = 19$ and $b_n = 423$.

If $\text{Rem}(n, 11) = 10$, then $k_n = 21$ and $b_n = 935$.

Therefore, in each cycle, $n \in \{11l, 11l + 1, \dots, 11l + 10\}$, we have $n = 11l, 11l + 3, 11l + 4, 11l + 6$, such that $b_n = b_{n+1}$. That is, $a_n = a_{n+1}$. At the boundary of two consecutive cycles, $b_{11L+10} \neq b_{11(L+1)}$.

We have $1000 = 90 \cdot 11 + 10$. Therefore, the number of feasible n is $91 \cdot 4 - 1 = \boxed{363}$.

~Steven Chen (Professor Chen Education Palace, www.professorchenedu.com)

強化学習による追加訓練

[\[DeepSeek-AI, 2025\]](#)

1. 長いCoTを使ってモデルに問題を解かせる
2. 1を複数回 (例: 16) 繰り返して解答を集める
3. 正解した解答に報酬を、間違った解答に罰則を与えてパラメータを更新
4. 1-3をひたすら繰り返す

強化学習による追加訓練

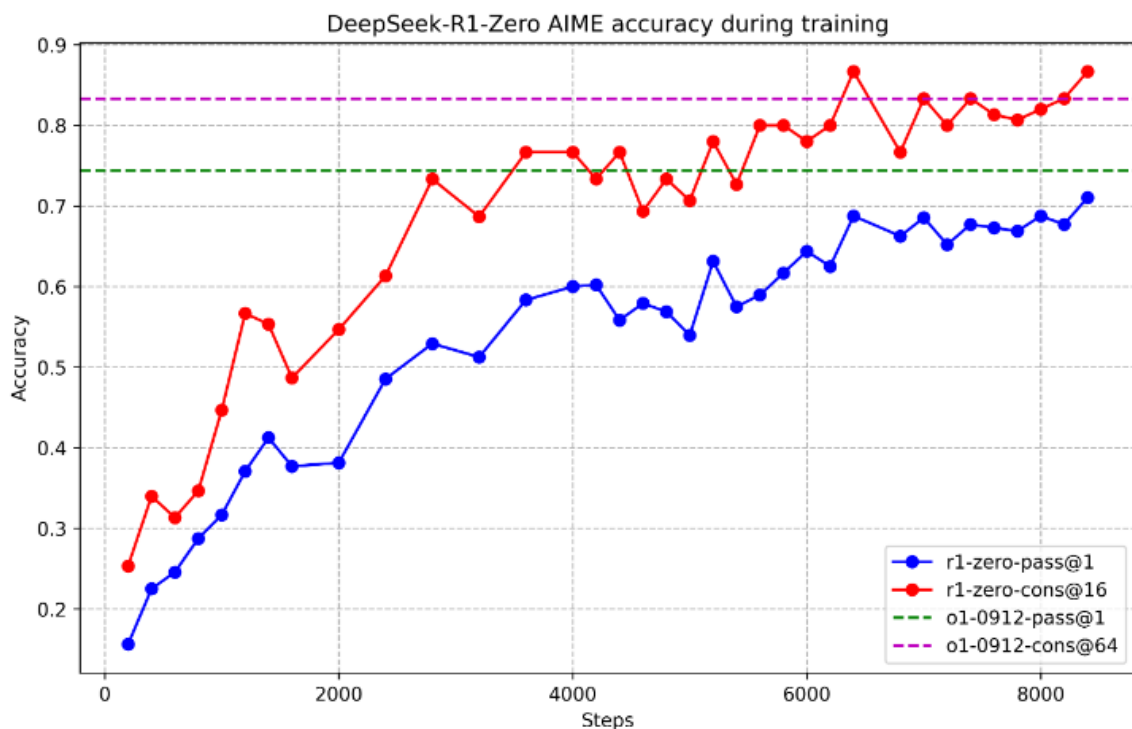
[\[DeepSeek-AI, 2025\]](#)

1. 長いCoTを使ってモデルに問題を解かせる
2. 1を複数回 (例: 16) 繰り返して解答を集める
3. 正解した解答に報酬を、間違った解答に罰則を与えてパラメータを更新
4. 1-3をひたすら繰り返す

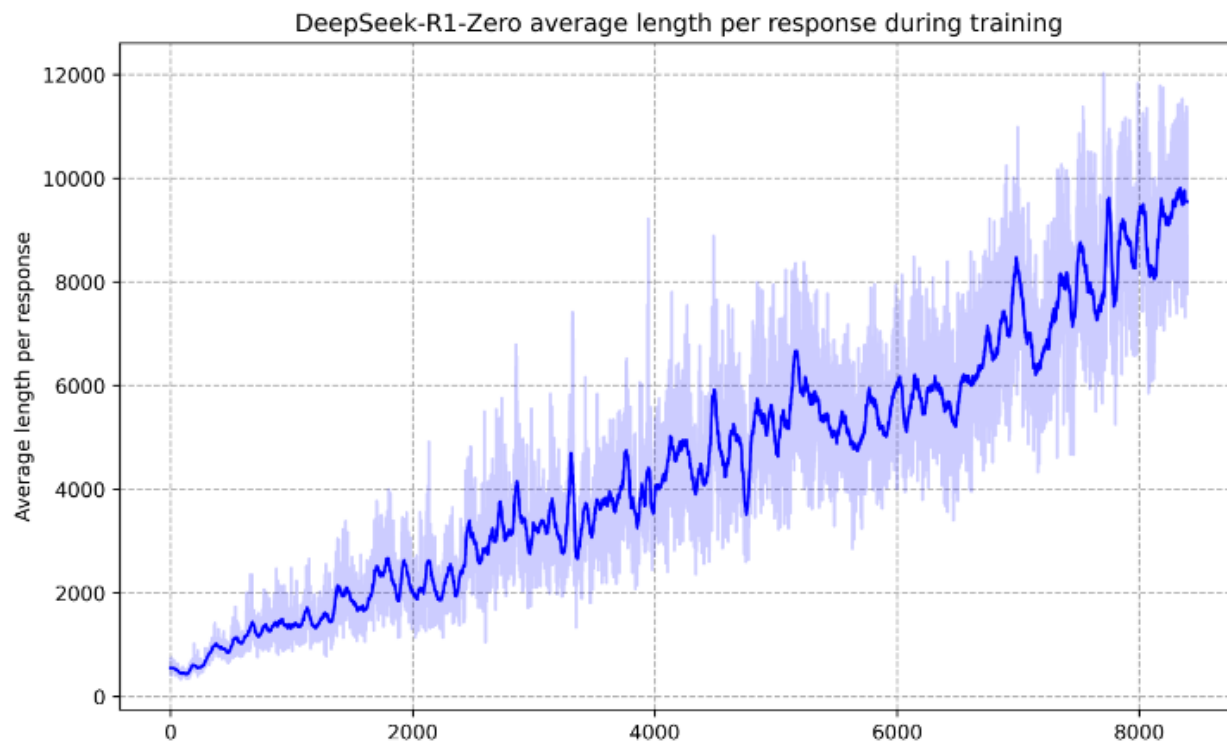
注: モデルが開始時点でも十分に賢くないと、いくら繰り返しても正解にたどりつきません

長いCoTで複雑な数学問題を解く

[DeepSeek-AI, 2025]



訓練を繰り返すと正解率が向上



問題ごとに数千単語も出力！

コンピュータが腑に落ちた！

[DeepSeek-AI, 2025]

Question: If $a > 1$, then the sum of the real solutions of $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$ is equal to

Response: <think>

To solve the equation $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$, let's start by squaring both ...

$$\left(\sqrt{a - \sqrt{a + x}}\right)^2 = x^2 \implies a - \sqrt{a + x} = x^2.$$

Rearrange to isolate the inner square root term:

$$(a - x^2)^2 = a + x \implies a^2 - 2ax^2 + (x^2)^2 = a + x \implies x^4 - 2ax^2 - x + (a^2 - a) = 0$$

...

Wait, wait. Wait. That's an aha moment I can flag here.

Let's reevaluate this step-by-step to identify if the correct sum can be ...

We started with the equation:

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

First, let's square both sides:

$$a - \sqrt{a + x} = x^2 \implies \sqrt{a + x} = a - x^2$$

Next, I could square both sides again, treating the equation: ...

...

まとめ

- コンピュータに数学の問題を解かせるうえでの大きな課題は、読解力を与えることでした
- 巨大なニューラル言語モデル (大規模言語モデル) に大量のテキストを与えて、ひたすら次の単語を予測させるという、驚くほど雑な方法で読解力の問題は解決できたようです
- ただし、次の単語を生成するモードでは問題に答えてくれるとは限らないので、追加の訓練 (指示チューニング) を行います
- 賢さが一定のレベルを超えて、長い試行錯誤ができるようになり、数学オリンピック級の複雑な問題が解けるようになってきました

最後に

この講義では、人間が自ら数学（算数）の問題を解くのではなく、代わりにコンピュータに解かせるという設定を考えます。そのためには、人間はコンピュータに何をどのように教えれば良いのでしょうか？この問いを探ることで、**私たち自身の知的活動の本質が見えてきます**。講義の中では、**ChatGPT**に代表される大規模言語モデルの最新の研究動向を紹介しつつ、**人間とコンピュータの知性の共通点や違いについても考えていきます**。

